Über ein neues Gesetz der lebendigen Kräfte in bewegten Flüssigkeiten.

Von **Dr. J. Stefan.**

Seien u, v, w die nach drei Orthogonalen Coordinatenaxen geschätzten Componenten der Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeit in irgend einem Punkte des von ihr erfüllten Raumes zur Zeit t besitzt. Die Lage dieses Punktes sei gegeben durch die Coordinaten x, y, z. Ist die Flüssigkeit eine tropfbare als incompressibel zu betrachtende, so muss bekanntlich die Gleichung

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

von Seite der u, v, w, die im Allgemeinen Functionen von x, y, z und t sind, erfüllt sein für den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum und für die ganze Dauer der Bewegung. Diese Gleichung (1) drückt aber nichts anderes aus, als dass die Flüssigkeit ein Continuum bilde und ein solches auch bleibe, heisst darum auch die Bedingungsgleichung der Continuität der Masse.

Für gewisse Bewegungsarten ist das Trinom

$$udx + vdy + wdz$$

ein vollständiges Differential einer Function von x, y, z bezüglich dieser drei Variablen. Solche Bewegungsarten sind z. B. jene, bei welchen die Geschwindigkeits-Componenten u, v, w fortwährend sehr klein bleiben und an jedem Orte nur um weniges verschieden sind von denen am Nachbarorte, auch jene, bei denen diese Geschwindigkeits-Componenten von der Zeit unabhängig sind, also die bewegte Flüssigkeit im Zustande der Beharrung sich befindet. Gleichzeitig müssen aber auch die beschleunigenden Kräfte, die auf die Flüssigkeit wirken, die Bedingung erfüllen, dass, wenn X, Y, Z die Summen ihrer nach den drei Coordinatenaxen geschätzten Componenten bedeuten, auch das Trinom

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

ein vollständiges Differential sei, die Kräfte also ein Potential besitzen.

Stellt man durch φ die angedeutete Function dar, so dass

$$udx + vdy + wdz = d\varphi \tag{2}$$

so hat man dem gemäss

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{3}$$

führt man diese Werthe von u, v, w in die Gleichung (1) ein, so verwandelt sich dieselbe in die folgende:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

Diese Gleichung wird im folgenden benützt zur Herleitung eines Gesetzes der lebendigen Kräfte in einer bewegten incompressiblen Flüssigkeit, welches einen bemerkenswerthen Zusammenhang zwischen dem Principe der lebendigen Kräfte und der Bedingung der Continuität der Masse darstellt.

Bezeichnet man mit ρ die Masse der Flüssigkeit in der Volumseinheit, also mit $\rho d\,x\,dy\,dz$ die Masse eines von der Flüssigkeit ausgefüllten Raumelementes $dx\,dy\,dz$, sind die Geschwindigkeits-Componenten in diesem Raumelemente die durch die Formeln (3) gegebenen, so ist die in demselben enthaltene lebendige Kraft dL gegeben durch die Gleichung

$$dL = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \tag{5}$$

Die in einem bestimmten Stücke des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes enthaltene lebendige Kraft ist dann

$$L = \frac{1}{2}\rho\iiint\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \tag{6}$$

worin die Integrationen zwischen denjenigen Grenzen auszuführen sind, welche die Ausdehnung des angenommenen Raumstückes charakterisiren.

Will man die lebendige Kraft k, die in einer zur Ebene der x, y parallelen Schichte enthalten ist, so hat man für diese die Gleichung

$$K = \frac{1}{2}\rho\iint\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy \tag{7}$$

worin wieder die Integrationsgrenzen den Ausdehnungen der Schichte entsprechend zu nehmen sind.

Da in der Formel (7) unter den Integralzeichen z als constant betrachtet werden kann, so kann man vorstehende Gleichung nach z deriviren und erhält, wenn z in den Integrationsgrenzen nicht vorhanden ist

$$\frac{\partial K}{\partial z} = \rho\iint\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial g\,\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right] dx\, dy. \tag{8}$$

Nun ist

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\,dx\,dy = \int\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}dy - \iint\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx\,dy \tag{9}$$

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\,dx\,dy = \int\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{e\varphi}{\partial z}\right\}dx - \iint\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,dx\,dy. \tag{10}$$

Die Parenthesen um die Ausdrücke

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ und } \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

bedeuten, dass in dem ersten dieser zwei Producte die Grenzen des Integrales bezüglich x, in dem zweiten die Grenzen des Integrales bezüglich y einzuführen sind, so dass immer von dem Substitutionsresultate, welches durch Einführung der oberen Grenze zum Vorschein kommt, das Substitutionsresultat, welches durch Einführung der unteren Grenze erhalten wird, abgezogen wird.

Mit Hilfe der Gleichungen (9) und (10) geht die unter (8) über in

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial z} &= \rho\int\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}dy + \rho\int\left\{\frac{\partial\varphi}{dy}\,\frac{\partial\varphi}{dz}\right\}dx \\ &+ \rho\iint\frac{d\varphi}{dz}\left(-\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)dx\,dy\end{aligned} \tag{11}$$

oder, da zu Folge der Gleichung (4)

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d^2\varphi}{dy^2}=\frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

ist, in die folgende

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dz} &= \rho\int\left\{\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\varphi}{dz}\right\}dy + \rho\int\left\{\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d\varphi}{dz}\right\}dx \\ &+ 2\rho\iint\frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}\,dx\,dy\end{aligned} \tag{12}$$

Die beiden einfachen Integrale in dieser Gleichung beziehen sich nur auf die Contour der betrachteten Flüssigkeitsschichte. Bezeichnet man daher mit ds ein Bogenelement in irgend einem Punkte dieser Contour, mit α den Winkel, welchen die zur Ebene der xy parallele Normale dieser Contour mit der Axe der x bildet, so hat man

$$dx = ds\sin\alpha,\quad dy = ds\cos\alpha$$

und man kann

$$\int\left\{\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\varphi}{dz}\right\}dy = \int\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\varphi}{dz}\cos\alpha\,ds$$

$$\int\left\{\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d\varphi}{dz}\right\}dx = \int\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d\varphi}{dz}\sin\alpha\,ds$$

setzen, beachtend, dass in den Integralen auf der rechten Seite

$$\frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz}$$

die Geschwindigkeits-Componenten an den verschiedenen Punkten der Contour der betrachteten Schichte bedeuten. Man hat also

$$\int \left\{\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\varphi}{dz}\right\} dy + \int \left\{\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d\varphi}{dz}\right\} dx = \int \frac{d\varphi}{dz} \left(\frac{d\varphi}{dx} \cos\alpha + \frac{d\varphi}{dy} \sin\alpha\right) ds,$$

Liegt die Contour der betrachteten Schichte in der Wand des Gefässes, in welchem sich die Flüssigkeit bewegt, so fallen, da vorausgesetzt wurde, dass z in den Integrationsgrenzen bezüglich x und y in der Gleichung (7) nicht vorkomme, Normale der Contour und Normale der Wandfläche zusammen. Da also auch die letztere mit der Axe der x den Winkel α, mit der Axe der y den Winkel $90 - \alpha$ bildet, so sind

$$\frac{d\varphi}{dx} \cos\alpha \text{ und } \frac{d\varphi}{dy} \sin\alpha$$

die Projectionen der zu den Axen der x und y parallelen Geschwindigkeits-Componenten auf die Richtung der Normale, also

$$\frac{d\varphi}{dx} \cos\alpha + \frac{d\varphi}{dy} \sin\alpha$$

die Geschwindigkeits-Componente in der Richtung der Normale. Ist die Gefässwand eine starre, so hat man die Bedingungsgleichung

$$\frac{d\varphi}{dx} \cos\alpha + \frac{d\varphi}{dy} \sin\alpha = 0,$$

also ist auch

(13) $$\int \left\{\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\varphi}{dz}\right\} dy + \int \left\{\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d\varphi}{dz}\right\} dx = 0.$$

Führt man dieses Resultat in die Gleichung (12) ein, so erhält man

(14) $$\frac{dK}{dz} = 2\rho \iint \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d\varphi^2}{dz^2}\, dx\, dy,$$

oder wenn man beiderseits mit dz multiplicirt und integrirt

(15) $$K = \rho \iint \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dx\, dy + C$$

worin C die Constante der Integration bedeutet. Um diese zu bestimmen, nehmen wir an, dass die lebendige Kraft in derjenigen

Schichte, welche dem Werthe $z = z_0$ entspricht, K_0, dass ferner für diese Schichte

$$\rho \iint \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dx\, dy = 2V_0 \tag{16}$$

sei, so hat man

$$K_0 = 2V_0 + C$$

also

$$C = K_0 - 2V_0 \tag{17}$$

Setzt man noch das dem allgemeinen Werthe von z entsprechende Integral

$$\rho \iint \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dx\, dy = 2V \tag{18}$$

so kann man die Gleichung (15) in der folgenden Form schreiben

$$K - K_0 = 2\,(V - V_0) \tag{19}$$

Um diese Formel bequem in Worte umsetzen zu können, will ich einige besondere Bezeichnungen einführen.

Offenbar bedeutet das Integral

$$V = \frac{1}{2} \rho \iint \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dx\, dy$$

nichts anderes, als den Theil der lebendigen Kraft in der betrachteten Schichte, welcher von den zur Axe der z parallelen Geschwindigkeits-Componenten herrührt. Ich will diesen Theil der lebendigen Kraft die axiale lebendige Kraft nennen. Dann kann die Gleichung (19) folgendermassen ausgesprochen werden:

Der Zuwachs an lebendiger Kraft einer in einem Gefässe bewegten Flüssigkeit beim Übergange aus einem Querschnitte in einen anderen ist immer gleich dem doppelten Zuwachse der axialen lebendigen Kraft, vorausgesetzt, dass die starre Wand des Gefässes eine cylindrische Fläche von willkürlicher Leitcurve sei.

Ferner ist

$$K = \frac{1}{2} \rho \iint \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right] dx\, dy + V$$

und darin bedeutet das Doppelintegral denjenigen Theil der lebendigen Kraft in dem betrachteten Querschnitte, welcher von den zu den Axen der x und y parallelen also von den in den Querschnitt selbst fallenden Geschwindigkeits-Componenten herrührt. Ich will diesen Theil der lebendigen Kraft die laterale lebendige Kraft nennen und mit H bezeichnen, so dass

(20)
$$H = \frac{1}{2}\rho \iint \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right] dx\, dy$$

gesetzt wird. Dann ist

(21)
$$K = H + V,$$

die laterale lebendige Kraft in demjenigen Querschnitte, der dem Werthe $z = z_0$ entspricht, soll mit H_0 bezeichnet werden, dann ist auch noch

(22)
$$K_0 = H_0 + V_0,$$

somit, wenn man diese Gleichung von der (21) subtrahirt

(23)
$$K - K_0 = H - H_0 + V - V_0;$$

führt man diesen Werth der Differenz der lebendigen Kräfte in die Gleichung (19) ein, so folgt aus derselben

(24)
$$H - H_0 = V - V_0.$$

Diese Gleichung in Worten ausgedrückt sagt:

Bewegt sich eine Flüssigkeit in einem Gefässe, dessen starre Wand eine cylindrische Fläche ist, so beträgt beim Übergange aus einem Querschnitt in einen anderen der Zuwachs der lateralen lebendigen Kraft so viel als der Zuwachs der axialen.

Befindet sich z. B. Wasser in einem Gefässe mit verticalen Seitenwänden und horizontaler Bodenfläche in schwingender Bewegung, so können die Theilchen an der Bodenfläche nur horizontale Bewegungen ausführen, daselbst gibt es daher nur eine horizontale lebendige Kraft, keine verticale. In jeder zur Bodenfläche parallelen Schichte muss daher nach dem vorstehenden Gesetze die horizontale lebendige Kraft grösser sein als die verticale und zwar um gerade so viel, als die horizontale lebendige Kraft an der Bodenfläche beträgt.

Es werden also in jeder Schichte die horizontalen Bewegungen überwiegen und zugleich beide Bewegungen, die horizontale und die verticale von oben nach unten fortwährend abnehmen. Wegen der überwiegenden horizontalen Geschwindigkeiten müssen daher auch die Bahnen, welche die einzelnen Theilchen der Flüssigkeit beschreiben, welche Gestalt sie auch haben mögen, doch so beschaffen sein, dass ihre horizontalen Dimensionen die verticalen übertreffen.

Strömt Wasser in einer Röhre, deren Querschnitt sich plötzlich ändert, so dass sie eigentlich aus zwei Röhren, einer engeren und einer weiteren besteht, deren Axen jedoch in eine Gerade fallen, so müssen nothwendig am Anfange des weiteren Röhrenstückes seitliche Bewegungen vorkommen, in Richtungen, welche auf der Axe der Röhre senkrecht stehen. In Querschnitten, die weiter von der Übergangsstelle entfernt sind, treten dann gewöhnlich nur Bewegungen auf, die parallel zur Axe der Röhre sind, wenigstens sind die etwa vorhandenen seitlichen sehr klein. Es gibt also im weiteren Röhrenstücke in der Nähe der Übergangsstelle eine laterale lebendige Kraft, die in den entfernteren Querschnitten nicht mehr vorhanden ist. Diese geht daher verloren und unserem Gesetze gemäss eine ebenso grosse Menge axialer lebendiger Kraft. Dabei ist vorausgesetzt, dass das Wasser aus der engeren in die weitere Röhre ströme. Der Überschuss von axialer lebendiger Kraft am Anfange des weiteren Röhrenstückes würde, wenn diese lebendige Kraft von lauter Geschwindigkeiten im Sinne der Bewegung herrührte, zur Folge haben, dass aus einem solchen mit einem Überschusse begabten Querschnitte mehr Flüssigkeit in die entfernteren übergeführt als aus letzteren in derselben Zeit abgeführt würde, was bei einer incompressiblen Flüssigkeit ungereimt ist. Die axiale lebendige Kraft am Anfange des weiteren Röhrenstückes rührt daher von Geschwindigkeiten her, die verschiedene Vorzeichen tragen, d. h. es entstehen beim Übergange des Wassers aus einer engeren in eine weitere Röhre am Anfange der letzteren Wirbelbewegungen. Diese sind jedoch nicht die einzigen seitlichen Bewegungen, sondern es treten noch wellenförmige auf, die noch auf weitere Entfernungen hin sich erhalten, als die ersteren.

Strömt das Wasser aus einem weiteren Röhrenstücke in ein engeres, so wird am Ende des weiteren wegen der stattfindenden seitlichen Bewegungen ein Überschuss von lebendiger Kraft auf-treten, der in den entfernteren Querschnitten nicht vorhanden war. Die Analogie dieser Erscheinungen mit der Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur an den Stellen, an welchen ein elektrischer Strom aus einem Leiter in einen andern übergeht, ist offenbar.

Um die Grösse dieser Änderungen in den lebendigen Kräften und zugleich die Abhängigkeit derselben von der Art der Querschnittsänderung zu erfahren, will ich nur noch den besonders wichtigen Fall betrachten, in welchem die Wand des Gefässes eine Rotationsfläche ist entstanden durch die Umdrehung irgend einer krummen Linie um die Axe der z. Die Bewegung in diesem Gefässe soll eine derartige sein, dass in der Peripherie jedes auf der Axe der z senkrecht stehenden Kreises, dessen Mittelpunkt in der Axe selbst liegt, einerlei Bewegungszustände stattfinden. Die Axe der z bildet daher eine Symmetrieaxe nicht blos hinsichtlich der Form des Gefässes, sondern auch hinsichtlich der Bewegung. Man kann sie daher die Axe der Bewegung nennen. Wird zugleich vorausgesetzt, dass keine drehenden Bewegungen um diese Axe vorkommen, so setzen sich die zur Axe der z senkrechten Geschwindigkeitscomponenten in radiale Geschwindigkeiten zusammen.

Sind wieder u, v, w die zu den Axen der x, y, z parallelen Geschwindigkeits-Componenten in einem Punkte dessen Coordinaten x, y, z sind, ist ferner s die radiale Geschwindigkeit in diesem Punkte, so hat man dem Gesagten zu Folge

$$u = s \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v = s \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

oder wenn man

(25) $$x^2 + y^2 = r^2$$

setzt

(26) $$u = s \frac{x}{r}, \quad v = s \frac{y}{r}$$

Wegen der Symmetrie der Bewegung um die Axe der z dürfen s und w nur insoferne Functionen von x und y sein, als sie Functionen von r sind, dürfen also x und y explicirt nicht enthalten. Dann hat man offenbar

$$\frac{du}{dx} = \frac{ds}{dr}\,\frac{dr}{dx}\,\frac{x}{r} + s\left(\frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\,\frac{dr}{dx}\right)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{ds}{dr}\,\frac{dr}{dy}\,\frac{y}{r} + s\left(\frac{1}{r} - \frac{y}{r^2}\,\frac{dr}{dy}\right)$$

oder da zu Folge der Gleichung (25)

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$$

ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{ds}{dr}\,\frac{x^2}{r^2} + s\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{ds}{dr}\,\frac{y^2}{r^2} + s\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right)$$

Führt man diese Werthe von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ in die Gleichung (1) und reducirt die Ausdrücke mit Hilfe der Gleichung (25), so erhält man statt der Gleichung (1) die folgende

$$\frac{ds}{dr} + \frac{s}{r} + \frac{dw}{dz} = 0 \tag{27}$$

Ist auch in dem jetzigen Falle das Trinom $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential der Function φ, so geht die Gleichung (2) über in

$$s\,\frac{xdx}{r} + s\,\frac{ydy}{r} + wdz = d\varphi$$

oder da man

$$xdx + ydy = rdr$$

hat, in

$$sdr + wdz = d\varphi, \tag{28}$$

folglich sind s und w die partiellen Derivirten von φ nach r und z, d. i.

$$s = \frac{d\varphi}{dr}, \quad w\,\frac{d\varphi}{dz} \tag{29}$$

führt man diese Werthe von s und w in die Gleichung (27), so erhält man

(30) $$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Denkt man sich eine auf der Axe der z senkrechte Flüssigkeitsschichte, in ihr ein Flächenelement, welches in polaren Coordinaten ausgedrückt $rdrd\theta$ ist, unter θ den Winkel verstanden, den r mit einer fixen Geraden in dieser Schichte bildet, die durch den Mittelpunkt derselben geht, so ist die darin enthaltene lebendige Kraft

$$K = \frac{1}{2}\,\rho\int_0^l\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] rdrd\theta,$$

wenn l die Länge des Radius der diese Schichte begrenzenden Contour bedeutet. Integrirt man nach θ, so hat man

(31) $$K = \pi\rho\int_0\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] rdr\; d\theta,$$

die obere Grenze der Integration ist in diesem Ausdrucke eine Function von z, etwa darstellbar durch

$$l = f(z),$$

wenn dies die Gleichung jener krummen Linie bedeutet, durch deren Umdrehung um die Axe der z die Wandfläche des Gefässes entstanden ist. Die Differentiation der Gleichung (31) gibt daher

(32) $$\frac{dk}{dz} = 2\pi\rho\int\left[\frac{d\varphi}{dr}\,\frac{d^2\varphi}{drdz} + \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right] rdr + d$$
$$\pi\rho\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_0^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0^2\right] l\,\frac{dl}{dz}$$

worin die Zeichen

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_0 \text{ und } \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0$$

die Werthe der radialen und axialen Geschwindigkeiten an der Wandfläche bedeuten, also aus den allgemeinen $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ hervorgehen, wenn man in diesen an die Stelle von r überall den Grenzwerth l einsetzt.

Zur Transformation der Gleichung (39) hat man

$$\int_o^l \frac{d\varphi}{dr}\,\frac{d^2\varphi}{dr\,dz}\,r dr = \left\{\frac{d\varphi}{dr}\,\frac{d\varphi}{dz}\,r\right\}_o^l - \int_o^l \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d\left(r\,\frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr}\,dr$$

Der integrirte Theil verschwindet für die Substitution $r = o$, für die Substitution $r = l$ können wir seinen Werth analog der oben gebrauchten Bezeichnung durch

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o l$$

darstellen. Man hat daher, wenn man noch

$$\frac{d\left(r\,\frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} = \frac{d\varphi}{dr} + r\,\frac{d^2\varphi}{dr^2}$$

setzt

$$\int_o^l \frac{d\varphi}{dr}\,\frac{d^2\varphi}{dr\,dz}\,r dr = \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o l - \int_o^l \frac{d\varphi}{dz}\left(\frac{d\varphi}{dr} + r\,\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right) dr$$

Nun ist nach Gleichung (30)

$$\frac{d\varphi}{dr} + r\,\frac{d^2\varphi}{dr^2} = -\,r\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

also hat man

$$\int_o^l \frac{d\varphi}{dr}\,\frac{d^2\varphi}{dr\,dz}\,r dr = \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o l + \int_o^l \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}\,r dr,$$

führt man diesen Werth in Gleichung (32) ein, so hat man nunmehr

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dz} = 4\pi\rho \int_o \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}\,r dr + 2\pi\rho \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o l \\ + \pi\rho\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o^2\right] l\,\frac{dl}{dz}\end{aligned} \quad (33)$$

Nimmt man das Integral

$$A = \pi\rho \int\limits_{o} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 rdr$$

welches offenbar nichts anderes als die axiale lebendige Kraft in der Schichte, deren Radius l ist, bedeutet, und differenzirt es nach z, so hat man

$$\frac{dA}{dz} = 2\pi\rho \int\limits_{o} \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}\, rdr + \pi\rho \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o^2 l\,\frac{dl}{dz}$$

also

$$4\pi\rho \int\limits_{o} \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}\, rdr = 2\,\frac{dA}{dz} - 2\pi\rho \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o^2 l\,\frac{dl}{dz}$$

Dieser Ausdruck in die Gleichung (33) eingeführt liefert

$$\frac{dK}{dz} = 2\,\frac{dA}{dz} + 2\pi\rho \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o l + \pi\rho \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o^2 l\,\frac{dl}{dz}$$

(34) $$- \pi\rho \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o^2 l\,\frac{dl}{dz}$$

Die Flüssigkeitstheilchen an der Wand des Gefässes besitzen, wenn dieselbe fest ist, nur eine Geschwindigkeit längs derselben. Nennen wir diese für jene Punkte der Wand, welche dem betrachteten Querschnitte vom Radius l angehören, p, so hat man

(35) $$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o = p \sin\alpha,\quad \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_o = p\cos\alpha$$

wenn α der Winkel ist, den die Tangente der Wandfläche in der Ebene des Radius l gezogen mit der Axe der z bildet.

Da man die Gleichung der Curve, durch deren Umdrehung um die Axe der z die Wandfläche entsteht, durch

$$l = f(z)$$

darstellen kann, so ist

(36) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dl}{dz}$$

Setzt man die Werthe (35) und (36) in die Gleichung (34), so hat man

$$\frac{dK}{dz} = 2\frac{dA}{dz} + \pi\rho l\,p^2\left[2\sin\alpha\cos\alpha + (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}\alpha\right]$$

welche Gleichung sich leicht in

$$\frac{dK}{dz} = 2\frac{dA}{dz} + \pi\rho lp^2 \operatorname{tg}\alpha \qquad (37)$$

verwandelt. Das Zeichen des Gliedes $\pi\rho lp^2 \operatorname{tg}\alpha$ ist nur von dem Zeichen, welches $\operatorname{tg}\alpha$ trägt, abhängig. Zählt man die positiven z im Sinne der Bewegung, so ist gedachter Ausdruck positiv, wo die Röhre im Sinne der Bewegung sich erweitert, negativ, wo sie eine Verengung erfährt.

Da die Geschwindigkeit an der Wandfläche in einem und demselben Querschnitte nach der ganzen Peripherie den nämlichen Werth besitzt, so ist

$$2\pi l\rho\frac{p^2}{2} = \pi\rho lp^2$$

die lebendige Kraft in der Peripherie des betrachteten Querschnittes. Heisst diese P, so geht die Gleichung (37) über in

$$\frac{dK}{dz} = 2\frac{dA}{dz} + P\frac{dl}{dz} \qquad (38)$$

Bezeichnet man mit ds das Bogenelement der die Wandfläche erzeugenden Curve, mit α wieder den Neigungswinkel derselben zur Axe der z, so hat man

$$dl = ds\sin\alpha,\quad dz = ds\cos\alpha$$

und man kann die Gleichung (38) auch in der Form

$$\frac{dK}{dz} = 2\frac{dA}{dz} + P\sin\alpha\,.\frac{ds}{dz} \qquad (39)$$

schreiben und diese enthält folgenden Lehrsatz:

Bewegt sich eine incompressible Flüssigkeit in einem Gefässe, dessen feste Wandfläche eine Rotationsfläche um die Axe der Bewegung ist, so ist der Zuwachs der lebendigen Kraft beim Übergange von einem Querschnitt zum nächsten gleich dem doppelten Zuwachse der axialen lebendigen Kraft mehr dem Producte aus der zwischen den Querschnitten liegenden lebendigen Kraft an der Wand in den Sinus des Neigungswinkels der Wandfläche zur Axe der Bewegung.

Bildet die Wandfläche einen geraden Kegel, so ist α constant, also auch $\sin \alpha$. Nimmt man zwei Querschnitte, deren einer durch die Coordinate z_0, der andere durch die Coordinate z_1 charakterisirt ist, multiplicirt die Gleichung (39) mit dz und integrirt sie von $z = z_0$ bis $z = z_1$, so ist

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dK}{dz}\, dz = 2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{dA}{dz}\, dz + \sin \alpha \int_{z_0}^{z_1} P \frac{ds}{dz}\, dz$$

Bezeichnet man die Werthe von K und A, welche für die speciellen Werthe z_0 und z_1 gelten, mit K_0, A_0 und K_1, A_1, setzt ferner

$$\int_{z_0}^{z_1} P \frac{ds}{dz}\, dz = W,$$

woselbst W nichts anderes als die ganze zwischen den beiden angenommenen Querschnitten an der Wandfläche vorhandene lebendige Kraft bedeutet, so ist

$$K_1 - K_0 = 2\,(A_1 - A_0) + W \sin \alpha.$$

Die lebendige Kraft nimmt mehr zu, als die doppelte axiale, wenn der Kegel in der Richtung der Bewegung sich öffnet, im umgekehrten Falle wächst die doppelte axiale lebendige Kraft rascher, der Unterschied beträgt immer die lebendige Kraft an der Wandfläche in den Sinus des Neigungswinkels des Kegels multiplicirt.

Stellt man durch R jenen Theil der lebendigen Kraft in einem Querschnitte dar, welcher aus den radialen Geschwindigkeits-Componenten resultirt, so hat man

$$K = A + R$$

$$\frac{dK}{dz} = \frac{dA}{dz} + \frac{dR}{dz}$$

Nach Einführung dieses Werthes von $\frac{\partial K}{\partial z}$ verwandelt sich die Gleichung (39) in

$$\frac{dR}{dz} = \frac{dA}{dz} + P \sin \alpha \frac{ds}{dz} \tag{40}$$

Beim Übergange der Flüssigkeit aus einem Querschnitte in den nächsten wächst die radiale lebendige Kraft um so viel, als die axiale, mehr noch um das Product aus der zwischen den beiden Querschnitten vorhandenen lebendigen Kraft an der Wand in den Sinus des Neigungswinkels der Wand zur Axe der Bewegung.

Der Zuwachs der radialen lebendigen Kraft ist grösser als der der axialen, wenn die Röhre sich erweitert, kleiner, wenn sie sich im Sinne der Bewegung verengt.

Man kann nun auch den Verlust an lebendiger Kraft bestimmen, den die Flüssigkeit erleidet, wenn sie aus einer engeren in eine weitere Röhre strömt. Durch die Coordinate z_0 sei ein Querschnitt im engeren, durch die Coordinate z_1 ein Querschnitt im weiteren Stücke der Röhre gekennzeichnet. Kommen in diesen Querschnitten nur Bewegungen parallel zur Axe der z vor, oder sind doch die radialen verschwindend klein, so kann man, durch R_0 und R_1 die radialen lebendigen Kräfte in den beiden Schnitten darstellend,

$$R_0 = R_1 = 0$$

setzen. Multiplicirt man die Gleichung (40) mit dz, integrirt sie von $z = z_0$ bis $z = z_1$ und bezeichnet mit A_0, A_1 die axialen lebendigen Kräfte in den beiden Schnitten, so ist

$$R_1 - R_0 = A_1 - A_0 + \int_{z_0}^{z_1} P \sin \alpha \frac{ds}{dz} dz$$

also ist der Verlust an lebendiger Kraft, denn diese ist nur axiale, gegeben durch

$$(41) \qquad A_0 - A_1 = \int_{z_0}^{z_1} P \sin\alpha \frac{ds}{dz}\, dz$$

Dieser Verlust geht sogleich in einen Gewinn über, sobald sin α lauter negative Werthe besitzt, d. i. wenn die Flüssigkeit aus dem weiteren in das engere Stück sich bewegt.

Wird die Übergangsstelle durch eine konische Erweiterung gebildet, so dass man wenigstens nahezu sin α constant setzen kann, so hat man

$$A_0 - A_1 = W \sin\alpha,$$

worin W die ganze an der Wand der Übergangsstelle vorhandene lebendige Kraft bedeutet.

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die Wand des Gefässes eine feste sei. Ist sie dieses nicht, sondern ändert mit der Zeit ihre Form, so hat man dann l von t abhängig. Nehmen wir an, die Änderungen der Wandfläche seien so beschaffen, dass die Contour eines Querschnittes immer in derselben Ebene bleibe und die Wandfläche den Charakter einer Rotationsfläche nicht verliere, also auch die Bewegung eine um die Axe der z symmetrische bleibe. Dann ist bei den Flüssigkeitstheilchen an der Wand ausser der Geschwindigkeit, mit der sie sich längs der Wand bewegen, noch die Geschwindigkeit, mit der sich die Wand selbst bewegt, zu beachten. Nennen wir diese letztere q, so ist

$$q = \frac{dl}{dt}$$

und wenn p wieder die Geschwindigkeit längs der Wand darstellt, so hat man

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_o = q + p \sin\alpha$$

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_o = p \cos\alpha$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (34), so folgt

$$\frac{dK}{dz} = 2\,\frac{dA}{dz} + 2\pi\rho l\,(q + p\sin\alpha)\,p\cos\alpha$$
$$+ \pi\rho l\,(q + p\sin\alpha)^2\,\mathrm{tg}\,\alpha - \pi\rho l\,p^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

welche Gleichung sich nach einigen Reductionen in

$$\frac{dK}{dz} = 2\,\frac{dA}{dz} + \pi\rho l\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(\frac{2pq}{\sin\alpha} + p^2 + q^2\right) \qquad (42)$$

verwandelt. Die Geschwindigkeit, welche den Theilchen an der Wand in Wirklichkeit zukommt, ist die Diagonale des Parallelogramms, welches aus p und r construirt werden kann. Nennt man diese Geschwindigkeit c, so hat man

$$c^2 = p^2 + q^2 + 2pq\sin\alpha.$$

Setzt man daraus

$$p^2 + q^2 = c^2 - 2pq\sin\alpha$$

in die Gleichung (42), so erhält man

$$\frac{dK}{dz} = 2\,\frac{dA}{dz} + \pi\rho l\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(c^2 + 2pq\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

Bemerkt man nun, dass

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dl}{dz} = \frac{ds}{dz}\sin\alpha$$

ist, unter ds wieder das Bogenelement der die Wand erzeugenden Curve verstanden, so geht vorige Gleichung in die folgende über:

$$\frac{dK}{dz} = 2\,\frac{dA}{dz} + \pi\rho l c^2\sin\alpha\,\frac{ds}{dz} + 2\pi\rho l\,pq\cos^2\alpha\,\frac{ds}{dz}$$

Darin ist offenbar $\pi p l c^2$ die allen Theilchen, die in der Peripherie des betrachteten Querschnittes liegen, eigenthümliche lebendige Kraft. Sei diese Q und setzen wir noch

$$2\pi p l\, p \cos^2 \alpha = R,$$

so geht vorige Gleichung über in

$$\frac{dK}{dz} = 2\,\frac{dA}{dz} + Q \sin\alpha\,\frac{ds}{dz} + Rq\,\frac{ds}{dz}. \tag{43}$$

welche Gleichung um ein Glied mehr enthält, als die unter (40). Der Zuwachs der lebendigen Kraft beträgt also mehr als der doppelte Zuwachs der axialen, nicht blos um die mit sin α multiplicirte lebendige Kraft der Wand, sondern noch um eine Grösse, die positiv ist, wenn die Wand sich nach auswärts bewegt, negativ im umgekehrten Falle. Es mag genügen, den Fall einer beweglichen Wand nur angedeutet zu haben.